

Ακολουθίες

Αθανάσιος Σταυρακούδης

<http://stavrakoudis.econ.uoi.gr>

23 Οκτωβρίου 2020

Ορισμός

Ακολουθία είναι κάθε διατεταγμένη συλλογή πραγματικών αριθμών.

Παράδειγμα

$$2, 4, 6, 8, \dots$$
$$1, -1, 1, -1, 1, \dots$$
$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

Παράδειγμα

το λατινικό αλφάβητο : $\{A, B, C, \dots, Z\}$

Παράδειγμα

το λατινικό αλφάβητο : $\{A, B, C, \dots, Z\}$

Παράδειγμα

η σήμανση στις πλευρές του ζαριού : 1, 2, 3, 4, 6

Ορισμός

Κάθε όρος a_n εξαρτάται από τουλάχιστον έναν προηγούμενο όρο, πχ a_{n-1}

Παράδειγμα

$$a_n = a_{n-1} + 1, \quad a_1 = 0$$

$$a_n = a_{n-1} + 2, \quad a_1 = 2$$

$$a_n = 2 a_{n-1} + 1, \quad a_1 = 0$$

$$a_n = \frac{n}{1 + a_{n-1}}, \quad a_1 = 0$$

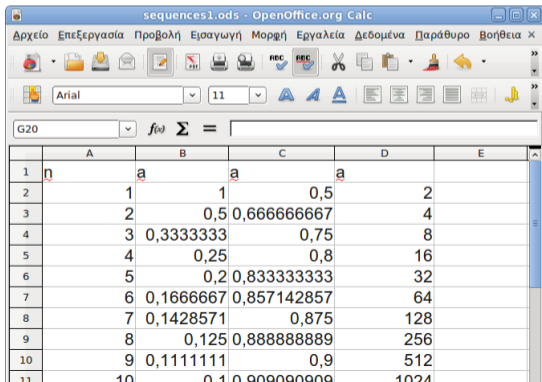
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad a_1 = 1, a_2 = 1$$

Παράδειγμα ακολουθιών στο Excel/Calc

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots, 10 \quad (1)$$

$$a_n = \frac{n}{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots, 10 \quad (2)$$

$$a_n = 2^n, \quad n = 1, 2, \dots, 10 \quad (3)$$



The screenshot shows a spreadsheet window titled "sequences1.ods - OpenOffice.org Calc". The spreadsheet has columns labeled A, B, C, D, and E. The first row (row 1) contains the labels "n" in column A and "a" in columns B, C, and D. The subsequent rows (rows 2-11) contain numerical values for n and a. The values for a in column B correspond to the sequence $a_n = \frac{1}{n}$, and the values in column D correspond to the sequence $a_n = 2^n$. The values in column C are not explicitly defined by a formula in the image but appear to be intermediate calculations or another sequence.

	A	B	C	D	E
1	n	a	a	a	
2	1	1		0,5	2
3	2	0,5	0,666666667	0,75	4
4	3	0,3333333		0,8	8
5	4	0,25	0,833333333		16
6	5	0,2	0,857142857		32
7	6	0,1666667	0,875		64
8	7	0,1428571	0,888888889		128
9	8	0,125	0,9		256
10	9	0,1111111	0,909090909		512
11	10	0,1	0,909090909		1024

Παράδειγμα ακολουθιών στο Excel/Calc

- 1 Συμπληρώνουμε τη στήλη A με τους φυσικούς αριθμούς $n = 1, 2, \dots, 10$
- 2 Γράφουμε στο κελί b2 τον τύπο της πρώτης ακολουθίας:
=1/a2
- 3 Γράφουμε στο κελί c2 τον τύπο της δεύτερης ακολουθίας:
=a2/(a2+1)
- 4 Γράφουμε στο κελί d2 τον τύπο της δεύτερης ακολουθίας:
=2^a2
- 5 Επιλέγουμε τα κελιά a2 : d2 και συμπληρώνουμε τους τύπους μέχρι και την γραμμή 11

- Ο Ινδός Σίσσα ανακαλύπτει το σκάκι
- Το παιχνίδι ενθουσιάζει τους Ινδούς, η φήμη του Σίσσα φτάνει στον ηγεμόνα της περιοχής
- Ο βασιλιάς επίσης ενθουσιάζεται και προτείνει στον Σίσσα να του ζητήσει ότι θέλει για ανταμοιβή
- Ο Σίσσα ζητάει σιτάρι: 1 κόκκο στο πρώτο τετραγωνάκι της σκακιέρας, 2 κόκκους στο δεύτερο, 4 κόκκους στο τρίτο, κ.λπ.
- Δηλαδή σε κάθε τετραγωνάκι, ζήτησε τους διπλάσιους κόκκους από το προηγούμενο
- Ο βασιλιάς παρεξηγήθηκε από τον «ευτελής» δώρο που ζήτησε ο Σίσσα
- Ήταν όμως ευτελής;
- Πόσους κόκκους σιταριού ζήτησε ο Σίσσα;

Γεωμετρική πρόοδος

Η γεωμετρική πρόοδος:

$$a_n = 2^{n-1}$$

$$n = 1, \quad a_1 = 2^0 = 1$$

$$n = 2, \quad a_2 = 2^1 = 2$$

$$n = 3, \quad a_3 = 2^2 = 4$$

$$n = 4, \quad a_4 = 2^3 = 8$$

... ..

μπορεί ισοδύναμα να γραφεί ως :

$$a_n = 2 a_{n-1}, \quad a_1 = 1$$

Η ακολουθία στο Excel/Calc

Chess.ods - OpenOffice.org Calc

Αρχείο Επεξεργασία Προβολή Εισαγωγή Μορφή Εργαλεία Δεδομένα Παράθυρο Βοήθεια

Arial 11

E3 $f(x) \Sigma =$ =SUM(B2:B65)

	A	B	C	D	E
1	<u>n</u>	<u>a</u>			
2		1	1	=2^(a2-1)	<u>sum=</u>
3		2	2		1,844674407E+019
4		3	4		<u>=sum(b2:b65)</u>
5		4	8		
6		5	16		
7		6	32		
8		7	64		
61		60	5,765E+017		
62		61	1,153E+018		
63		62	2,306E+018		
64		63	4,612E+018		
65		64	9,223E+018		

Άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n = \sum_{k=0}^n ar^k = a \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r},$$

Αν $n = 63$, $a = 1$, $r = 2$, τότε:

$$\sum_{k=0}^{63} 2^k = \frac{1 - 2^{64}}{1 - 2} = 2^{64} - 1 \approx 1.8 \times 10^{19}$$

περίπου 18 εκα κόκκοι σιταριού,
πολύ πάνω από την παγκόσμια παραγωγή

αριθμοί Fibonacci

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

ή

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

ορισμός

Κάθε όρος της ακολουθίας είναι το άθροισμα των δύο προηγούμενων

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Ορισμός

Μια ακολουθία $\{a_n\}$ συγκλίνει στο L

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

όταν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει θετικός ακέραιος N , τέτοιος ώστε $|a_N - L| < \epsilon$, για κάθε $n > N$

Συμβολικά: $a_n \rightarrow a$

Παράδειγμα

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0$$

Έστω:

$$\phi_n = \frac{F_n}{F_{n_1}}$$

Δηλαδή η ακολουθία που οι όροι της είναι ο λόγος δύο διαδοχικών όρων της ακολουθίας Fibonacci. Η ακολουθία συγκλίνει:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n_1}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

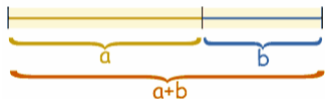
Ως ρίζα εξίσωσης

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

Ως κλάσμα

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}$$

Η χρυσή τομή



$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} \approx 1.618$$



πηγή: <http://www.mathsisfun.com/numbers/golden-ratio.html>

Υπολογισμός ορίου ακολουθίας σε H/Υ

- 1 Θέτουμε ένα αυθαίρετα μικρό θετικό αριθμό ϵ , πχ $\epsilon = 10^{-4}$.
- 2 Θέτουμε τους πρώτους όρους της ακολουθίας, συνήθως 1 ή 2.
- 3 Υπολογίζουμε τον επόμενο όρο της ακολουθίας σύμφωνα με τον τύπο της ακολουθίας.
- 4 Υπολογίζουμε την διαφορά $|a_n - a_{n-1}|$ και ελέγχουμε αν $|a_n - a_{n-1}| < \epsilon$
- 5 Αν ο έλεγχος είναι ψευδής επαναλαμβάνουμε από το βήμα 3.
- 6 Αν ο έλεγχος είναι αληθής διακόπτουμε τη διαδικασία, το όριο είναι ο αριθμός a_n .

Υπολογισμός φ ως σύγκλιση ακολουθίας

SequenceConvergence.ods - OpenOffice.org Calc

Αρχείο Επεξεργασία Προβολή Εισαγωγή Μορφή Εργαλεία Δεδομένα Παράθυρο Βοήθεια

Arial 11

C3 $f(x) \Sigma =$ =B3/B2

	A	B	C	D	E	F
1	<u>n</u>	F	Φ	δ	<u>control</u>	
2		1	1			
3	2	1	1	1	0	
4	3	2	2	1	0	
5	4	3	1,5	0,5	0	
6	5	5	1,6666667	0,1666667	0	
7	6	8	1,6	0,0666667	0	
8	7	13	1,625	0,0250000	0	
9	8	21	1,6153846	0,0096154	0	
10	9	34	1,6190476	0,0036630	0	
11	10	55	1,6176471	0,0014006	0	
12	11	89	1,6181818	0,0005348	0	
13	12	144	1,6179775	0,0002043	0	
14	13	233	1,6180556	0,0000780	1	
15	14	377	1,6180258	0,0000298	1	
16	15	610	1,6180371	0,0000114	1	

Σας ευχαριστώ για την προσοχή σας

Είμαι στη διάθεσή σας για σχόλια, απορίες και ερωτήσεις